

МАТЕМАТИКА - MATHEMATICS

УДК 517.968.220

МАСЪАЛАИ КАНОРӢ БАРОИ МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКАИ СИММЕТРИИ ҒАЙРИ МОДЕЛИИ НАМУДИ ВОЛТЕРРА БО ХАТӢОИ СУПЕРСИНГУЛЯРӢ

С.Б. Зарипов

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ

Дар кори мазкур басъалаи канорӣ барои муодилаи ғайри моделии дученакаи симметрии интегралӣ намуди Волтерра бо хатҳои суперсингулярӣ, омӯхта шудааст, ки нисбат ба тағйирёбандаи X симметрӣ мебошад. Дар асоси тасвирҳои ҳосилшудаи муодилаи ғайримоделии интегралӣ ҳангоме, ки ҳалли умумии муодила функсияи ихтиёриро дар бар мегирад, барои ёфтани доимии ихтиёрӣ масъалаи типи Кошӣ гузошта шуда, тадқиқ карда шудааст. Инчунин наздиқшавии тасвири интегралӣ бо ёрии шартҳои асимптотикӣ талаб карда шудааст. Вобаста ба натиҷаҳои ҳосилшуда, теоремаҳо баён шудаанд.

Калидвожаҳо: муодилаи ғайри моделӣ, муодилаи симметрӣ, хатҳои суперсингулярӣ, муодилаи интегралӣ дученака, формулаи асимптотикӣ, доимӣҳои ихтиёрӣ.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕМОДЕЛЬНОГО ДВУХМЕРНОГО СИММЕТРИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛТЕРРЫ С СУПЕРСИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

С.Б. Зарипов

В работе изучается граничное условие для немодельного двумерного симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с суперсингулярными линиями, симметричного относительно переменной X . На основе полученных представлений немодельного интегрального уравнения, когда общее решение уравнения содержит произвольную функцию, ставится и исследуется задача типа Коши для нахождения произвольной константы. При этом требуется аппроксимация интегрального представления асимптотическими условиями. На основе полученных результатов формулируются теоремы.

Ключевые слова: немодельное уравнение, симметричное уравнение, суперсингулярные линии, двумерное интегральное уравнение, асимптотическая формула, произвольные константы.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NON-MODEL TWO-DIMENSIONAL SYMMETRIC INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA TYPE WITH SUPERSINGULAR LINES

S.B. Zaripov

In this paper, we study the boundary condition for a non-model two-dimensional symmetric integral equation of the Volterra type with supersingular lines, symmetric with respect to the variable X . Based on the obtained representations of a non-model integral equation, when the general solution of the equation contains an arbitrary function, a Cauchy-type problem is posed and investigated to find an arbitrary constant. This requires approximating the integral representation with asymptotic conditions. Theorems are formulated based on the obtained results.

Keywords: non-model equation, symmetric equation, supersingular lines, two-dimensional integral equation, asymptotic formula, arbitrary constants.

Муқаддима

Яке аз фаслҳои зарурии математикаи замони ҳозира, ки дар мавқеи илмӣ тадқиқи зиёд дорад, ин омӯзиш ва рушд додани муодилаҳои интегралӣ намуди Волтерра мебошад. Омӯзиши ин гуна муодилаҳои интегралӣ, ба бисёр масъалаҳои гуногуни амалӣ оварда мерасонад. Ҳамчунин муодилаҳои интегралӣ ғайри моделии симметрӣ дар физикаи назариявӣ, назарияи эластикӣ, назарияи майдон механикаи назариявӣ ва дигар самтҳои физикаи математикӣ татбиқ мешаванд. Дар байни муодилаҳои интегралӣ Волтерра муодилаи дученакаи интегралӣ ғайримоделии симметрӣ ҷои махсусро ишғол мекунанд. Мақсади омӯзиш ва тадқиқи мазкур, ин ба даст овардани ҳалҳои бисёршакла барои муодилаи интегралӣ дученакаи симметрии намуди Волтерра нисбат ба яке аз тағйирёбандаҳои симметрӣ бо соҳаҳои суперсингулярӣ мебошад. Инчунин бо ҳалли умумии ҳосилшуда, ки доимӣҳои ихтиёриро дар бар мегирад, гузориши масъалаи канорӣ низ тадқиқ карда шудааст.

Гузориши масъала

Бо ёрии D росткунҷаи зеринро ишорат мекунем:

$$D_0 = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < b\}, \quad D_0^- = \{-a < x < 0, 0 < y < b\}, \quad D_0^+ = \{0 < x < a, 0 < y < b\}, \quad \Gamma_0 = \{-a < x < a\}, \quad \Gamma_1 = \{0 < y < b\}, \quad l_1 = [-a < x < 0], \quad l_2 = [0 < x < a].$$

Онгоҳ $\Gamma_0 = l_1 \cup l_2$.

Дар соҳаи D муодилаи интегралӣ дученакаи намуди зеринро дида мебароем:

$$\varphi(x, y) + \int_{-x}^x \frac{K_1(x, y, t)}{|t|^\alpha} \varphi(t, y) dt + \int_0^y \frac{K_2(x, y, s)}{s^\beta} \varphi(x, s) ds + \int_{-x}^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{K_3(x, y, t, s)}{s^\beta} \varphi(t, s) ds = f(x, y). \quad (1)$$

дар ин ҷо $\alpha = \text{const} > 1$, $\beta = \text{const} > 1$, $K_1(x, y, t)$, $K_2(x, y, s)$,

$K_3(x, y, t, s)$, $f(x, y)$ – функцияҳои бефосилаи додашуда буда, инчунин $K_1(0, 0, t) \neq 0$, $K_2(0, 0, s) \neq 0$, $K_3(0, 0, t, s) \neq 0$, дар соҳаи росткунҷаи додашудаи D мебошанд.

Ҳалли муодилаи интегралӣ ғайримоделии дученакаи симметрии (1) – ро дар синфи функцияҳои чуствуҷ менамоем, ки функцияи $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(0, 0)$, ба сифр баробар шавад, бо формулаи асимптотикӣ зерин:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = o[|x|^{\gamma_1} y^{\gamma_2}], \quad \gamma_1 > \alpha - 1, \\ \gamma_2 > \beta - 1 \quad \text{дар ҳолати} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Дар муодилаи ғайримоделии интегралӣ (1), функсияҳои дар ядро буда, байни худ алоқаманд нестанд. Бо истифода аз натиҷаҳои §1.6, дар [3], масъала оид ба ёфтани ҳалли муодилаи интегралӣ ғайримоделии дученакаи (1) оварда мешавад, ба омӯختани системаи муодилаҳои ғайримоделии зерин:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y) - \int_0^x \frac{K_1(x, y, t)}{|t|^\alpha} (\varphi_1(t, y) + \varphi_2(t, y)) dt + \int_0^y \frac{K_2(x, y, s)}{s^\beta} \varphi_2(x, s) ds - \\ - \int_0^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{K_3(x, y, t, s)}{s^\beta} (\varphi_1(t, s) + \varphi_2(t, s)) ds = f(-x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) + \int_0^x \frac{K_1(x, y, t)}{|t|^\alpha} (\varphi_1(t, y) + \varphi_2(t, y)) dt + \int_0^y \frac{K_2(x, y, s)}{s^\beta} \varphi_1(x, s) ds + \\ + \int_0^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{K_3(x, y, t, s)}{s^\beta} (\varphi_1(t, s) + \varphi_2(t, s)) ds = f(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Баробариҳои (1.6.3) ва (1.6.4) – ро ҳамҷо карда, ҳосил мекунем:

$$\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} K_2(x, y, s) [\varphi_2(x, s) + \varphi_1(x, s)] ds = f(-x, y) + f(x, y), \quad (5)$$

гузоришҳои навбатиро иҷро мекунем:

$$\Psi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y), \quad F(x, y) = f(-x, y) + f(x, y).$$

Онгоҳ муодилаи ғайри моделии (5) ба намуди зерин дода мешавад:

$$\Psi(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} K_2(x, y, s) \Psi(x, s) ds = F(x, y), \quad (6)$$

Дар тарафи чапи муодилаи ҳосилшудаи (6) функсияи $K_2(0, 0, s)$ - ро ҳамҷо ва фарқ карда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\Psi(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} K_2(0, 0, s) \Psi(x, s) ds = F(x, y) - \int_0^y s^{-\beta} [K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)] \Psi(x, s) ds. \quad (7)$$

Дар баробарии ҳосил кардаи (7), гузоришҳои зеринро истифода мебарем:

$$K_2(0, 0, s) = B(s),$$

$$F^1(x, y) = F(x, y) - \int_0^y s^{-\beta} [K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)] \Psi(x, s) ds. \quad (8)$$

Дар ин ҳолат муодилаи (7) чунин намудро мегирад:

$$\Psi(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} B(s) \Psi(x, s) ds = F^1(x, y). \quad (9)$$

Ҳолати $B(0) < 0$.

Бигузур, дар муодилаи ғайримоделии якченакаи интегралӣ (9) $B(0) < 0$, онгоҳ ҳалли муодилаи (9), бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = \exp[B(0)\omega_\beta(y) - W_\beta^\beta(y)] c_1(x) + F^1(x, y) - \\ - \int_0^y \exp[B(0)(\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) + W_\beta^\beta(s) - W_\beta^\beta(y)] F^1(x, s) B(s) s^{-\beta} ds, \end{aligned} \quad (10)$$

дар ин ҷо $c_1(x)$ – функсияи ихтиёрии Γ_0 . Ҳалли интегралӣ намуди (10) дар ҳолате ҷой дорад, ки функсияи $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$, бо рафтори асимптотикии зерин:

$$\begin{aligned} f(x, y) = o\left[\exp\left(B(0)\omega_\beta(y)\right) y^{\gamma_3} |x|^{\gamma_4}\right], \quad \gamma_3 > \alpha - 1 \\ \gamma_4 > \beta - 1 \quad \text{дар ҳолати} \quad y \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Қимати функсияи $F^1(x, y)$ аз тасвири интегралӣ (8), ба ифодаи (10) гузошта, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} [K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)] \Psi(x, s) ds - \int_0^y s^{-\beta} \Psi(x, s) ds * \\ * \int_s^y \exp \left[B(0) (\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s_1)) + W_b^\beta(s_1) - W_b^\beta(y) \right] B(s_1) s_1^{-\beta} * \\ * [K_2(x, s_1, s) - K_2(0, 0, s)] ds_1 = Y(x, y), \end{aligned} \quad (12)$$

дар ин ҷо

$$\begin{aligned} Y(x, y) = \exp[B(0)\omega_\beta(y) - W_b^\beta(y)] c_1(x) + f(-x, y) + f(x, y) - \int_0^y \exp[B(0) - \\ - (\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y)] (f(-x, s) + f(x, s)) B(s) s^{-\beta} ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Функсияи нави $N_2^{-1}(x, y, s)$ ворид месозем:

$$\begin{aligned} N_2^{-1}(x, y, s) = s^{-\beta} [K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)] + s^{-\beta} \int_s^y \exp[B(0) (\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s_1)) + \\ + W_b^\beta(s_1) - W_b^\beta(y)] B(s_1) s_1^{-\beta} [K_2(x, s_1, s) - K_2(0, 0, s)] ds_1, \end{aligned}$$

Онгоҳ тасвири интегралӣ (12) намуди зеринро мегирад:

$$\Psi(x, y) + \int_0^y N_2^{-1}(x, y, s) \Psi(x, s) ds = Y(x, y). \quad (14)$$

Бигузор, ядроӣ муодила яъне $K_2(x, y, s)$ дар атрофи $(x, y) = (0, 0)$ шартӣ зеринро қаноат кунонад:

$$|K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)| \leq H_1 \cdot s^{\sigma_1} \cdot y^{\sigma_2}, \quad \sigma_1 > \beta - 1, \quad \sigma_2 > 0. \quad (15)$$

бо дарназардошти баҳодиҳии (15) ва нобаробарии зерин

$$\begin{aligned} \exp[|(B(0)[\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)] + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y))B(s)|] \leq |M|, \\ \delta = (\sigma_1 - \beta + 1), \end{aligned}$$

барои функсияи $N_2^{-1}(x, y, s)$ баҳодиҳии зеринро ҳосил мекунем:

$$|N_2^{-1}(x, y, s)| \leq H_2 \cdot s^{(\sigma_1 - \beta + 1) - 1}.$$

дар ин ҷо

$$H_2 = \max |H_1 \left(y^{\sigma_2} + \frac{M(s^{\sigma_2 - \beta + 1} - y^{\sigma_2 - \beta + 1})}{\sigma_2 - \beta + 1} \right)|.$$

Ба ҳамин тариқ, баҳодиҳии ядроҳои тақроршавандаро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} |N_2^{2\alpha}(x, y, s)| &\leq H_2^2 \cdot \int_s^y s^{\delta-1} s_1^{\delta-1} ds_1 \leq \frac{H_2^2 s^{\delta-1}}{\delta} (y^\delta - s^\delta), \\ |N_2^{3\alpha}(x, y, s)| &\leq H_2^3 \cdot \int_s^y s^{\delta-1} \frac{s_1^{\delta-1}}{\delta} (s^\delta - s_1^\delta) ds_1 \leq H_2^3 \frac{s^{\delta-1}}{2\delta^2} (y^\delta - s^\delta)^2, \\ |N_2^{4\alpha}(x, y, s)| &\leq H_2^4 \cdot \frac{s^{\delta-1}}{6\delta^3} (y^\delta - s^\delta)^3, \\ |N_2^{5\alpha}(x, y, s)| &\leq H_2^5 \cdot \frac{s^{\delta-1}}{24\delta^4} (y^\delta - s^\delta)^4, \dots \\ |N_2^{n\alpha}(x, y, s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} H_2^n \frac{s^{\delta-1} (y^\delta - s^\delta)^{n-1}}{(n-1)! \delta^{n-1}}. \end{aligned}$$

Бо истифода аз баҳодиҳии боло, барои резолвентаи муодилаи (14) қатори можарантии зеринро ҳосил мекунем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_2^n \frac{s^{\delta-1}}{n! \delta^n} (y^\delta - s^\delta)^n. \quad (16)$$

Қатори можарантии (16) мутлақ наздикшаванда мешавад, агар фарқияти $K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)$ шартӣ (15) – ро қаноат кунонад.

Бо ёрии резолвента, бо назардошти [3], Ҳалли муодилаи интегралӣ (14) ба намуди зерин ифшо мегардад:

$$\Psi(x, y) = Y(x, y) - \lambda \int_0^y \Gamma_2(x, y, s) Y(x, s) ds. \quad (17)$$

Ҳалли интегралли намуди (17) дар ҳолате ҷой дорад, ки функсияи $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$, бо формулаи асимптотикии (11).

Дар тасвири интегралли (17) ба ҷои функсияи $\Psi(x, y)$, ($\Psi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$), қимати онро ба баробарии (17) гузошта ҳосил мекунем:

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) = Y(x, y) - \lambda \int_0^y \Gamma_2(x, y, s) Y(x, s) ds. \quad (18)$$

Аз баробарии интегралли (18) қимати функсияи $\varphi_2(x, y)$ бо ёрии функсияи $\varphi_1(x, y)$ – ро меёбем:

$$\varphi_2(x, y) = Y(x, y) - \lambda \int_0^y \Gamma_2(x, y, s) Y(x, s) ds - \varphi_1(x, y). \quad (19)$$

Қимати функсияи $\varphi_2(x, y)$ – ро аз баробарии (19) ба (4) гузошта, барои ёфтани функсияи $\varphi_1(x, y)$ муодилаи интегралли якченакаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) + \int_0^y s^{-\beta} K_2(x, y, s) \varphi_1(x, s) ds &= F^2(x, y), \\ F^2(x, y) &= f(x, y) + F^3(x, y), \\ F^3(x, y) &= \int_0^x |t|^{-\alpha} K_1(x, y, t) c_1(t) dt \left[-\exp(B(0)\omega_\beta(y) - W_b^\beta(y)) + \right. \\ &+ \int_0^y \exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)) \Gamma_2(t, y, s) ds \left. \right] - \int_0^x |t|^{-\alpha} c_1(t) dt * \\ &* \int_0^y K_3(x, y, t, s) [\exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s))] ds - \\ &- \int_0^y \exp(B(0)\omega_\beta(s_1) - W_b^\beta(s_1)) \Gamma_2(t, s, s_1) ds_1 \int_{s_1}^y K_3(x, y, t, s) \frac{ds}{s^\beta} + \\ &+ E_\alpha(x, y), \\ E_\alpha(x, y) &= \int_0^x |t|^{-\alpha} K_1(x, y, t) dt \left[\int_0^y e^{B(0)(\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y)} \cdot \right. \\ &(f(t, s) + f(-t, s)) \frac{B(s)}{s^\beta} ds - (f(t, s) + f(-t, s)) + \int_0^y \Gamma_2(t, y, s) * \\ &* (f(t, s) + f(-t, s)) ds - \int_0^y e^{(-B(0)\omega_\beta(s_1) - W_b^\beta(s_1))} (f(t, s_1) + f(-t, s_1)) * \\ &* \frac{B(s_1)}{s_1^\beta} ds_1 \int_{s_1}^y \Gamma_2(t, y, s) \exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)) ds \left. \right] - \\ &- \int_0^x |t|^{-\alpha} dt \int_0^y K_3(x, y, t, s) (f(t, s) + f(-t, s)) \frac{ds}{s^\beta} + \\ &+ \int_0^x |t|^{-\alpha} dt \int_0^y \exp(-B(0)\omega_\beta(s_1) + W_b^\beta(s_1)) (f(t, s_1) + \\ &+ f(-t, s_1)) \frac{B(s_1)}{s_1^\beta} ds_1 \int_{s_1}^y \exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)) K_3(x, y, t, s) \frac{ds}{s^\beta} + \\ &+ \int_0^x |t|^{-\alpha} dt \int_0^y \Gamma_2(t, s, s_1) [f(t, s_1) + f(-t, s_1)] ds_1 * \\ &* \int_{s_1}^y K_3(x, y, t, s) \frac{ds}{s^\beta} - \int_0^x |t|^{-\alpha} dt \int_0^y \Gamma_2(t, s, s_1) \exp(B(0)\omega_\beta(s_1) - \end{aligned}$$

$$-W_b^\beta(s_1))ds_1 \int_{s_1}^y \exp(W_b^\beta(s_2) - B(0)\omega_\beta(s_2))(f(t, s_2) + f(-t, s_2)) * \\ * \frac{B(s_2)ds_2}{s_2^\beta} \int_{s_2}^y K_3(x, y, t, s) \frac{ds}{s^\beta}.$$

Агар функцияи $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0, 0) = 0$ шавад, бо рафтори асимптотикии (11), дар тасвири интегралӣ (12), $c_1(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $c_1(0) = 0$ шавад, бо рафтори асимптотикии зерин:

$$c_1(x) = o[|x|^{\gamma_5}], \quad \gamma_5 > \alpha - 1. \quad \text{ҳангоми} \quad x \rightarrow 0, \quad (21)$$

Онгоҳ тарафи рости муодилаи интегралӣ якченакаӣ (20), нисбат ба ҳарду тағйирёбандаҳо бефосила мешавад.

Пас масъала оид ба ёфтани ҳалли муодилаи интегралӣ (1), оварда мешавад, ба омӯзиши муодилаи интегралӣ якченакаӣ намуди Волтерра бо хатти суперсингулярӣ, бо истифода аз тадқиқоти боло, ҳалли муодилаи (20) – ро меёбем.

$$\varphi_1(x, y) = Z(x, y) - \lambda \int_0^y \Gamma_2(x, y, s)Z(x, s)ds, \quad (22)$$

дар ин ҷо

$$Z(x, y) = \exp[B(0)\omega_\beta(y) - W_b^\beta(y)] c_1(x) + F^2(x, y) - \int_0^y \exp[B(0)(\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) \\ + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y)] F^2(x, s) B(s) s^{-\beta} ds, \quad c_1(x) - \text{функсияи ихтиёрии } \Gamma_0.$$

Ба ҳамин тариқ, ҳалли муодилаи интегралӣ якченакаӣ (20) – ро дар синфи функцияҳои мекобем, ки $\varphi_1(0, y) = 0$ шавад, аз ҳамин сабаб дар баробарии (22) талаб мекунем, ки $c_1(0) = 0$ бо рафтори асимптотикии (21).

Ҳалли намуди (22) дар ҳолате ҷой дорад, ки функцияи $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0, 0) = 0$, бо рафтори асимптотикии (11).

Дар тасвири интегралӣ (20) ба ҷои қимати функцияи $Z(x, y)$ қимати онро гузошта, баъд аз якчанд тағйирот ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) = & \exp[B(0)\omega_\beta(y) - W_b^\beta(y)] c_1(x) - c_1(x) * \\ & * \int_0^y \Gamma_2(x, y, s)[B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)]ds + f(x, y) + F^3(x, y) - \\ & - \int_0^y e^{[B(0)(\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y)]} B(s) s^{-\beta} f(x, s) ds - \\ & - \int_0^y \exp[B(0)(\omega_\beta(y) - \omega_\beta(s)) + W_b^\beta(s) - W_b^\beta(y)] B(s) s^{-\beta} F^3(x, s) ds \\ & - \int_0^y \Gamma_2(x, y, s) f(x, s) ds - \int_0^y \Gamma_2(x, y, s) F^3(x, s) ds + \int_0^y B(s_1) s_1^{-\beta} * \\ & * e^{W_b^\beta(s_1) - B(0)\omega_\beta(s_1)} f(x, s_1) ds_1 \int_{s_1}^y \exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)) \Gamma_2(x, y, s) ds + \\ & + \int_0^y \exp(W_b^\beta(s_1) - B(0)\omega_\beta(s_1)) B(s_1) s_1^{-\beta} F^3(x, s_1) ds_1 * \\ & * \int_{s_1}^y \exp(B(0)\omega_\beta(s) - W_b^\beta(s)) \Gamma_2(x, y, s) ds \equiv T_1^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Қимати ёфташудаи функцияи $\varphi_1(x, y)$ – ро аз баробарии (23) ба баробарии (19) гузошта, қимати функцияи $\varphi_2(x, y)$ – ро меёбем:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y) &= Y(x, y) - \lambda \int_0^x \Gamma_2(x, y, s) Y(x, y) ds - T_1^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)] \equiv \\ &\equiv T_2^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)].\end{aligned}\quad (24)$$

Тасвири интегралли (23) ва (24) наздикшавандаанд, агар функсияи $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0, 0) = 0$ шавад ва рафтори он аз рӯи формулаи асимптотикии (11) муайян карда шавад.

Дар асоси муҳокимарониҳои болои ба ҳуллосае омадем, ки ҳалли муодилаи интегралли (1) ҳангоми $B(0) < 0$ бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} T_1^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)], & \text{ҳангоми } (x, y) \in D_0^+ \\ T_2^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)], & \text{ҳангоми } (x, y) \in D_0^- \end{cases} \quad (25)$$

Ба ҳамин тариқ, муҳокимарониҳои зерин ҷой дорад:

Теоремаи 1. Бигуздор, дар муодилаи ғайри моделии интегралли (1), $\alpha = \text{const} > 1$, $\beta = \text{const} > 1$, $B(0) < 0$, фарқияти функсияҳои намуди $K_2(x, y, s) - K_2(0, 0, s)$ дар атрофи хатти $(x, y) = (0, 0)$ ба сифр майл кунад, бо рафтори асимптотикии (15). Ба ғайр аз ин фарз мекунем, ки $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0, 0) = 0$, бо рафтори асимптотикии (11). Онгоҳ муодилаи интегралли (1) дар синфи $C(\bar{D})$, дар ибтидои системаи координатӣ ба сифр майл карда, дорои ҳал мебошад ва ҳалли умумии ёфташуда, як функсияи ихтиёро дар бар мегирад ва бо ёрии (25), (24), (23), дода мешавад, ки дар ин ҷо $c_1(x)$ – функсияи ихтиёрии нуқтаи Γ_0 мебошад, инчунин $c_1(0) = 0$ бо рафтори асимптотикии (21).

Қайд кардан ба маврид аст, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 1. ҳалли намуди (25) дорои хосияти зерин мебошад:

$$[\exp(-B(0)\omega_\beta(y))\varphi(x, y)]_{y=0} = [T_1^{B(0), \beta}[c_1(x), f(x, y)]y^{B(0)}]_{y=0} = c_1(x). \quad (26)$$

Пас, хосияти (26) ба мо имконият медиҳад, ки барои муодилаи (1) гузориши масъалаи канории зеринро дида бароем:

Масъалаи R1. Талаб карда мешавад, ки ҳалли муодилаи интегралли (1) аз синфи функсияи $C(\bar{D})$, ҳангоми $B(0) < 0$ ёфта шавад, аз рӯи шартҳои канории зерин:

$$[\exp(-B(0)\omega_\beta(y))\varphi(x, y)]_{y=0} = A^\alpha(x), \quad (27)$$

дар ин ҷо $A^\alpha(x)$ – функсияи додашудаи нуқтаи Γ_0 .

Ҳалли масъалаи R1. Бигуздор, шартҳои теоремаи 1. иҷро шаванд.

Бо истифода аз хосияти (26) ва шартҳои масъалаи канории R1, аз тасвири интегралли (23) ҳосил мекунем:

$$[\exp(-B(0)\omega_\beta(y))\varphi(x, y)]_{y=0} = c_1(x) - \int_0^x \frac{K_1(x, 0, t)}{|t|^\alpha} c_1(t) dt \equiv \tau^\alpha(x),$$

дар ин ҷо

$$\tau^\alpha(x) = A^\alpha(x) - [\exp(-B(0)\omega_\beta(y))f(x, y)]_{y=0} - \int_0^x \left[\frac{K_1(x, y, t)}{|t|^\alpha} (f(t, y) + f(-t, y)) \exp(-B(0)\omega_\beta(y)) \right]_{y=0} dt.$$

Ба ҳаимн тариқ, барои ёфтани функсияи ихтиёрии $c_1(x)$ муодилаи интегралли якченакаи зеринро ҳосил мекунем:

$$c_1(x) - \int_0^x \frac{K_1(x, 0, t)}{|t|^\alpha} c_1(t) dt = \tau^\alpha(x). \quad (28)$$

Бо назардошти натиҷаҳои ҳосилшудаи боло ҳалли муодилаи интегралли якченакаи (28) бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \theta^\alpha(x) - \lambda \int_0^x \Gamma_1(t, s) \theta^\alpha(t) dt, \\ \theta^\alpha(x) - \lambda \int_0^x \Gamma_1(t, s) \theta^\alpha(t) dt &= T^\alpha(c_2, \tau^\alpha(x)),\end{aligned}\quad (29)$$

дар ин ҷо

$$\theta^\alpha(x) = \exp(A_1(0)\omega_\alpha(x) - W_a^\alpha(x)) c_2 + \tau^\alpha(x) - \int_0^x \exp[A_1(0)(\omega_\alpha(x) -$$

$$-\omega_{\alpha}(t)) + W_a^{\alpha}(t) - W_a^{\alpha}(x)] \frac{A_1(t)}{|t|^{\alpha}} \tau^{\alpha}(t) dt,$$

c_2 – доимии ихтиёрест, $A_1(x) = -A(x)$.

Қимати функцияи номатҳули $c_1(x)$ бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$c_1(x) = T^{\alpha}(c_2, \tau^{\alpha}(x))$. Қимати ёфташудаи функцияи $c_1(x)$ – ро ба ҳалли умумии (25) гузошта, ҳалли масъалаи R_1 – ро ҳосил мекунем:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} T_1^{B(0), \beta} [T^{\alpha}(c_2, \tau^{\alpha}(x)), f(x, y)], & \text{ҳангоми } (x, y) \in D_0^{+} \\ T_2^{B(0), \beta} [T^{\alpha}(c_2, \tau^{\alpha}(x)), f(x, y)], & \text{ҳангоми } (x, y) \in D_0^{-} \end{cases}. \quad (30)$$

Теоремаи 1. Бигузур, дар муодилаи ғайри моделии симметрии интегралӣ (1) функцияи $f(x, y)$ шартҳои теоремаи 1 - ро қаноат кунонад, ҳудуди зерин мавҷуд бошад,

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\exp(-B(0)\omega_{\beta}(y)) f(x, y)] = f_1(x).$$

Ғайр аз ин, бигузур фарқияти $K_1(x, s) - K_1(0, s)$ дар атрофи хатти $x=0$ шартҳои зеринро қаноат кунонад:

$$|K_1(x, s) - K_1(0, s)| \leq o[|t|^{\gamma_5}], \quad \gamma_5 > \alpha - 1.$$

Онгоҳ масъалаи R_1 дорои ҳал буда, бо ёрии формулаи (30) дода мешавад.

Хулоса

Усулҳои дар боло тадқиқшуда ва натиҷаҳои ҳосилшударо ба инобат гирифта, гуфтан мумкин аст, ки барои минбаъд вусъатдиҳии назарияи муодилаҳои интегралӣ ғайримоделии дученака ва бисёрченакаи симметрии намуди Волтерра бо хатҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ, инчунин барои дигар масъалаҳои гуногуни амалӣ истифода бурдан мумкин аст. Бо дида баромадани муодилаи ғайримоделии интегралӣ симметрии намуди Волтерра - чинси дуюм бо ҳудудҳои тағйирёбандаи симметрий, ба мисол ва масъалаҳои фазоии нисбат ба тир симметрии назарияи эластикӣ оварда мерасонад.

Муҳаррир: Хушвахтзода М. – н.и.ф.-м., муовини декан оид ба илми факултети механикаи математикаи Донишгоҳи миллии Ҷоҷикстон.

Адабиёт

1. Зарипов С.Б. Интегральные уравнения симметричного бинарного типа Вольтерра со специальными внутренними и граничными линиями порядка / С.Б.Зарипов // Политехнический Вестник – Душанбе, 2020. - №1(49). с.7-9.
2. Зарипов С.Б. Краевые задач для двумерного интегрального уравнения с сверх - сингулярной линией, симметричное относительно переменного X // Материалы Международной научно-практической конференции “Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс”. Воронежский государственный университет. Борисоглебск -2020г., с.358-361.
3. Раджабов Н., Зарипов С.Б. Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями LAPLAMBERT Academic Publishing, GERMANY, 2019г.- с.112.
4. Зарипов С.Б. Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями /С.Б. Зарипов, Н.Р. Раджабов // Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing; 2019.- с.112.
5. Зарипов С.Б. Немодельные двумерные симметричные интегральные уравнения Вольтерровского типа с сингулярной линией в частных случаях / Раджабов Н., С.Б.Зарипов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смешные проблемы». посвященной «110-летию основателя самарской математической школы профессора С.П. Пулькина и 90-летию профессора В.Ф. Волкодавова». - Самара. – 2017г. - с. 83-85.
6. Зарипов С.Б. К теории одного класса двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сверхсингулярной линией симметричных относительно одной из переменных / С.Б.Зарипов, Раджабов Н.Р. // Известия академии наук Республики Таджикистан, – Душанбе, 2020. - №1(178). с.37-43.
7. Зарипов С.Б. К теории трехмерного симметричного интегрального уравнения типа вольтерра с сингулярной областью/ С.Б.Зарипов //Материалы II Международной научно-практической конференции. “Актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс”. Эпистемологические основания современного образования. Борисоглебского филиала ФГБОУ ВО «ВГУ» 15-16 октября 2021 г. – с. 515-521.
8. Зарипов С.Б. Трехмерного симметричного интегрального уравнения типа вольтерра с сингулярной областей/ С.Б.Зарипов // Материалы V Международной научно-практической конференции

“ Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе” Республика Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия.16–18 сентября 2021 г. – с. 69-75.

9. Зарипов С.Б. Интегральные уравнения симметричного бинарного типа Вольтерра со специальными внутренними и граничными линиями порядка / С.Б.Зарипов // Политехнический Вестник – Душанбе, 2020. - №1(49). с.7-9.

10. Radjabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super - singularity kernels and their application / N.R. Radjabov //Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing; 2011. - 282p.

11. Зарипов С.Б. Муодилаҳои интегралҳои дученака ва сеченакаи симметрии намуди волтерра бо хатҳо ва соҳаҳои сингулярӣ ва суперсингулярӣ / С.Б. Зарипов // Монография - Душанбе: ДТТ ба номи. акад. М.С. Осимӣ, протоколи №5 аз 05.05.с.2021, 2021с.- с.131.

МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФОН — СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ — INFORMATION ABOUT AUTHORS

TJ	RU	EN
Зарипов Сухроб Бобокулович	Зарипов Сухроб Бобокулович	Zaripov Suhrob Boboqulovich
н.и.ф.-м., и.в.дотсент	к.ф.-м.н., и.о. доцента	Candidate of Physics and Mathematics, Acting Associate Professor
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими	Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi
E-mail: zaripov_s89@mail.ru		